Восстановление динамически искаженных сигналов

А. В. Дылевский, email: nefta@yandex.ru

Воронежский государственный университет,
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
(Воронежский филиал)

Аннотация. *Рассматривается задача восстановления сигналов, искаженных динамикой. На основе метода синтеза модальных регуляторов разработан метод построения передаточной функции устройства, обеспечивающего асимптотически точное помехозащищенное восстановление динамически искаженных сигналов, принадлежащих достаточно широкому классу.*

Ключевые слова: *динамически искаженный сигнал, передаточная функция, модальный регулятор*.

Введение

К задаче фильтрации примыкает задача восстановления сигнала, искаженного динамикой. Это задача восстановления входного сигнала по известному выходному или наблюдаемому сигналу и известной передаточной функции измерительного устройства [1]. Такая задача является достаточно типичной и часто возникает при получении информации о состоянии объекта управления. Как правило, эта информация получается с помощью инерционных датчиков, инерционность которых плохо влияет на устойчивость и качество замкнутой системы. Поэтому восстановление динамически искаженного входного сигнала позволяет уменьшить влияние инерционности датчиков и в некоторых случаях может иметь первостепенное значение.

1. Постановка задачи

Следуя принципу поглощения [2], класс входных сигналов $f : C^r[0,+\infty) \to R$ будем описывать дифференциальным уравнением

$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i f^{(r-i)}(t) = 0, \alpha_i \in R, \alpha_0 = 1, \quad (1)$$

с произвольными начальными условиями. Конкретный сигнал из данного класса определяется начальными условиями уравнения (1).

Заданный класс сигналов является достаточно широким. Действительно, экспоненциальные функции, алгебраические и тригонометрические многочлены и вообще квазиполиномы удовлетворяют требуемым условиям.

Предположим, что имеется датчик (объект)

$$W_{об}(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \qquad (2)$$

искажающий полезный сигнал $f(t)$ (см. рис. 1). Здесь предполагается, что многочлены $A(p)$ и $B(p)$ являются взаимно простыми, т.е. не имеют общих корней. Отметим, что объект (2) может быть неустойчивым или неминимально-фазовым.

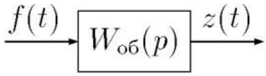

Рис. 1.

Требуется по $z(t)$, т.е. по выходу объекта $W_{об}(p)$, восстановить сигнал $f(t)$.

2. Описание метода решения поставленной задачи

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом синтеза модальных регуляторов по передаточной функции замкнутой системы [3, 4]. С этой целью применим к дифференциальному уравнению (1) преобразование Лапласа. Учитывая свойства линейности и дифференцирования оригинала [5], получаем

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{H(p)}, \qquad (3)$$

где

$$H(p) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i p^{r-i},$$

$F_0(p)$ — некоторый алгебраический многочлен относительно p степени не выше $r-1$, коэффициенты которого определяются значениями $f^{(i)}(+0)$, $i = \overline{0, r-1}$. При этом определение конкретного вида многочлена $F_0(p)$ для решения поставленной задачи не требуется.

Рассмотрим замкнутую систему со структурной схемой, представленной на рис. 2. По структурной схеме находим

$$G(p) = W(p)Z(p), \quad W(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_{об}(p)W_p(p)}. \tag{4}$$

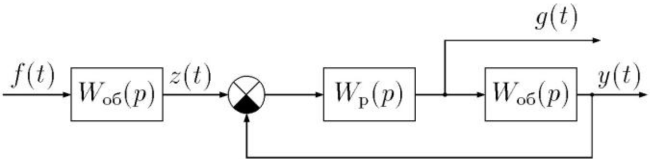

Рис. 2.

Выпишем далее изображение по Лапласу ошибки восстановления сигнала. Принимая во внимание формулу (4), получаем

$$E(p) = F(p) - G(p) = F(p) - \frac{W_p(p)}{1 + W_{об}(p)W_p(p)} Z(p). \tag{5}$$

Согласно структурной схеме, представленной на рис. 1, имеем

$$Z(p) = W_{об}(p)F(p).$$

Подставляя найденное $Z(p)$ в формулу (5), после элементарных преобразований находим

$$E(p) = \frac{1}{1 + W_{об}(p)W_p(p)} F(p). \tag{6}$$

Пусть передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$W_{з.с.}(p) = \frac{Q(p)}{D(p)}. \tag{7}$$

Здесь

$$Q(p) = \sum_{i=0}^{n} q_i p^{n-i}, \quad D(p) = \sum_{i=0}^{n} d_i p^{n-i}, \tag{8}$$

$D(p)$ — заданный произвольный характеристический многочлен замкнутой системы, $Q(p)$ — многочлен, требующий дальнейшего определения. Ограничение на степень n определяется условиями физической реализуемости передаточных функций регулятора и замкнутой системы. Условие для выбора n будет дано ниже. Передаточную функцию регулятора в соответствии с [4] следует выбирать следующим образом:

$$W_p(p) = \frac{S(p)}{R(p)}, \tag{9}$$

где $S(p)$ и $R(p)$ определяются условиями:

$$\begin{aligned} S(p) &= S_0(p) + A(p)C(p), \\ R(p) &= R_0(p) - B(p)C(p). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $C(p)$ — произвольный полином, а многочлены $S_0(p)$ и $R_0(p)$ являются решением следующего полиномиального уравнения:

$$B(p)S_0(p) + A(p)R_0(p) = D(p). \tag{11}$$

Следует отметить, что многочлены $S_0(p)$ и $R_0(p)$ не зависят от $C(p)$.

Условие физической реализуемости передаточных функций замкнутой системы (7) и регулятора (9) задается неравенством

$$n \geq m + \max\{m-1, l\} + k, \tag{12}$$

где

$$m = \deg A, \quad l = \deg B, \quad k = 1 + \deg C.$$

Учитывая формулы (2), (3), (9) – (11) из (6) находим

$$E(p) = \frac{A(p)R(p)}{D(p)} F(p) = \frac{A(p)R(p)}{D(p)} \frac{F_0(p)}{H(p)}. \tag{13}$$

Дополнительно потребуем, чтобы многочлены $A(p)$ и $H(p)$ не имели общих правых и нейтральных корней.

Если у многочлена $H(p)$ имеются правые или нейтральные корни, то представим $H(p)$ следующим образом:

$$H(p) = H_-(p)H_+(p).$$

Здесь $H_-(p)$ — алгебраический многочлен, содержащий все левые корни $H(p)$, $H_+(p)$ — алгебраический многочлен, содержащий все правые и нейтральные корни $H(p)$.

Из (13), принимая во внимание условие (10), получаем

$$E(p) = \frac{A(p)\left[R_0(p) - B(p)C(p)\right]F_0(p)}{D(p)H_-(p)H_+(p)}. \tag{14}$$

Выберем произвольный многочлен $C(p)$ таким образом, чтобы выполнялось следующее условие:

$$R_0(p) - B(p)C(p) = R_1(p)H_+(p), \tag{15}$$

где $R_1(p)$ — некоторый многочлен. В [4] показано, что условие (15) всегда может быть выполнено единственным способом. В частности, для определения коэффициентов многочлена $C(p)$ рассмотрим уравнение

$$R_0^{(\nu)}(\gamma_i) - \left(B(\gamma_i)C(\gamma_i)\right)^{(\nu)} = 0, \quad \nu = \overline{0, \mu_i - 1}, \tag{16}$$

где γ_i — правый или нулевой вещественный корень кратности μ_i многочлена $H_+(p)$. В том случае, если γ_i — правый или нейтральный комплексный корень кратности μ_i, то уравнение (15) можно записать в виде

$$\begin{cases} R_0^{(\nu)}\left(\dfrac{\gamma_i + \overline{\gamma_i}}{2}\right) - \left(B\left(\dfrac{\gamma_i + \overline{\gamma_i}}{2}\right)C\left(\dfrac{\gamma_i + \overline{\gamma_i}}{2}\right)\right)^{(\nu)} = 0, \\ R_0^{(\nu)}\left(\dfrac{\gamma_i - \overline{\gamma_i}}{2j}\right) - \left(B\left(\dfrac{\gamma_i - \overline{\gamma_i}}{2j}\right)C\left(\dfrac{\gamma_i - \overline{\gamma_i}}{2j}\right)\right)^{(\nu)} = 0, \end{cases} \tag{17}$$

где $\nu = \overline{0, \mu_i - 1}$, $j^2 = -1$, $\gamma_i, \overline{\gamma_i}$ — комплексно сопряженные корни.

Из уравнений (16), (17) следует, что в условии физической реализуемости (12) значение k определяется следующей формулой:

$$k = \sum_{i=1}^{\rho} \mu_i \,, \tag{18}$$

где ρ — количество правых и нейтральных корней многочлена $H(p)$, т.е. количество корней многочлена $H_+(p)$.

В [4] показано, что система линейных алгебраических уравнений (16), (17) всегда имеет единственное решение.

Тогда изображение по Лапласу ошибки восстановления сигнала принимает окончательный вид

$$E(p) = \frac{A(p)R_1(p)F_0(p)}{D(p)H_-(p)} \div \varepsilon(t). \tag{19}$$

Так как многочлены $H_-(p)$ и $D(p)$ являются устойчивыми, то в силу свойств преобразования Лапласа из (19) сразу следует, что $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Таким образом, устройство с передаточной функцией $W(p)$, определяемой по формуле (4), осуществляет асимптотически точное восстановление принадлежащего классу (1) произвольного сигнала, искаженного динамикой объекта (2).

Особо отметим, что благодаря возможности выбора желаемого характеристического многочлена $D(p)$ можно получить любой относительный порядок передаточной функции $W(p)$ и, тем самым, обеспечить фильтрующие свойства по отношению к высокочастотным аддитивным помехам измерения сигнала $z(t)$.

Заключение

В данной работе была рассмотрена задача восстановления сигнала, искаженного динамикой. С помощью метода синтеза модальных регуляторов разработан метод построения передаточной функции устройства, обеспечивающего асимптотически точное восстановление динамически искаженных сигналов, принадлежащих достаточно широкому классу. За счет выбора желаемых полюсов такого устройства можно влиять на точность и скорость восстановления входного сигнала, а также на фильтрующие свойства устройства восстановления.

Список литературы

1. Восстановление динамически искаженного сигнала на основе теории оптимальных динамических измерений / А. Л. Шестаков [и др.] // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 12. – С. 125-137.
2. Вишняков, А. Н. Синтез модальных дискретных систем управления / А. Н. Вишняков, Я. З. Цыпкин // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 7. – С. 86-94.
3. Лозгачев, Г. И. Синтез модальных регуляторов по передаточной функции замкнутой системы / Г. И. Лозгачев // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 5. – С. 49-55.
4. Дылевский, А. В. Синтез конечномерных регуляторов для бесконечномерных объектов : учебник Воронежского государственного университета / А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев, В. С. Малютина. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – 298 с.
5. Диткин, В. А. Операционное исчисление : учебное пособие для втузов / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1975. – 407 с.